MAI 2 - domácí úkol 3

Metrické prostory - problémky k promyšlení (a zkuste řešení aspoň dvou úloh „sepsat“)

1. Uvažujme prostory R^n a v nich metriky:

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \quad , \quad d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \quad \text{(Euklidovská metrika) a}$$

$$d_{\max}(x,y)=\max_k|x_k-y_k|.$$

Ověřme axiomy metrik $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$.

2. V prostoru $C[a,b]$ uvažujme metriky $d(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ a $d_1(f,g)=\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$

a ověřme opět axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$ (u ověření axiomů u $d_1(f,g)$ budeme asi potřebovat některé vlastnosti určitého integrálu).

3. Pokud se v prostoru $R[a,b]$ pokusíme a zavedení metriky $d(f,g)=\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$, který axiom metriky nebude splněn? Umíte „upravit“ prostor $R[a,b]$ tak, aby $d(f,g)=\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$ byla už metrika?

4*. Mějme lineární prostor V se skalárním součinem $\langle u,v\rangle$ a normou $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$;
v prostoru V definujeme metriku $d(u,v)=\|u-v\|$. Užitím Cauchy - Schwarzovy nerovnosti $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ ověřte platnost axiomů metriky $d(u,v)$.

Příklady :

1. prostoru R^n : $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ (Euklidovská metrika) ;

2.prostor $C[a,b]$ s metrikou $d_2(f,g)=\sqrt{\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|^2\,dx}$.

5. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):
   a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   c) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   d) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.